22 april 2008
blad 1 van 2

Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

1 $\underbrace{(xy^2 + 2yx^3)}_{P}dx + \underbrace{(x^2y + x^4)}_{Q}dy = 0$

Integrerende factor zoeken zodat $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$

dus $\frac{\partial}{\partial y}\mu - \frac{\partial}{\partial x}\mu = 2x^3$

maar hoe vind je die?

2 a) $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} y + \begin{pmatrix}0\\ e^x\end{pmatrix}$

Eerst bekijk ik het homogene systeem:

$y' = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} y$ $\qquad A = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix}4-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 6$

$= 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$

$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix}3/2 - \frac{\sqrt{33}}{2} & 3\\ 2 & -3/2 - \frac{\sqrt{33}}{2}\end{pmatrix}$ eigenvector: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ \frac{-3/2 + \frac{\sqrt{33}}{2}}{3}\end{pmatrix}$

Oplossingen $\vec{\varphi}_1(x) = e^{\frac{5+\sqrt{33}}{2}x} \cdot \begin{pmatrix}1\\ \frac{-3/2 + \frac{\sqrt{33}}{2}}{3}\end{pmatrix}$

$\vec{\varphi}_2(x) = e^{\frac{5-\sqrt{33}}{2}x} \cdot \begin{pmatrix}1\\ \frac{-3/2 - \sqrt{33}/2}{3}\end{pmatrix}$ ← op zelfde manier

$\vec{\varphi}_h(x) = c_1 \vec{\varphi}_1 + c_2 \vec{\varphi}_2$

Een particuliere oplossing voor het inhomogene stelsel is:
$\vec{\varphi}_p(x) = \frac{1}{2} e^x \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.
Gevonden door $\varphi_p = \begin{pmatrix}ae^x\\ be^x\end{pmatrix}$ uit te proberen en in te vullen.

Algemene opl: $\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}_p(x) + \vec{\varphi}_h(x)$ $\qquad$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2b) $y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Bij mij: $x = t$)

Eerst homogene systeem: $y' = Ay = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y$.

$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 3$

$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ een eigenvector is $\vec{v}_1 = (0, 1)^T$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ een gegeneraliseerde eigenvector is $\vec{v}_2 = (\frac{1}{2}, 0)^T$
en $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$

Dus oplossingen zijn:

$\vec{y}_1 = e^{3t} \cdot (0, 1)^T$ en $\vec{y}_2 = e^{3t}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

ofwel $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ en $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{3t} \\ t e^{3t} \end{pmatrix}$

Fundamentele matrix $= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} e^{3t} \\ e^{3t} & t e^{3t} \end{pmatrix}$

Voor het inhomogene stelsel zoek ik een particuliere oplossing in de vorm van $\vec{y}_p = Y(t) \cdot \vec{v}(t)$

Dan moet $Y \vec{v}' = \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

dus $\vec{v}' = Y(t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} t e^{3t} & -\frac{1}{2} e^{3t} \\ -e^{3t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2} e^{6t}} = \begin{pmatrix} -2t e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2 e^{-3t} & 0 \end{pmatrix}$

Dus $\vec{v}' = Y(t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}$ Dus $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}$

Dus $\vec{y}_p = Y(t) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

Dus de algemene oplossing is:

$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1/2\, e^{3t} \\ t e^{3t} \end{pmatrix}$

met C_1 en $C_2 \in \mathbb{R}$

3 a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$

Dus eigenwaarden zijn $\lambda_1 = -2i$ $\lambda_2 = 2i$

λ_1: $A - (-2i\,I) = A + 2iI = \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ oplossing $\vec{y}_1(t) = e^{-2it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
eigenvector $\vec{v}_1 = (1, -i)^T$

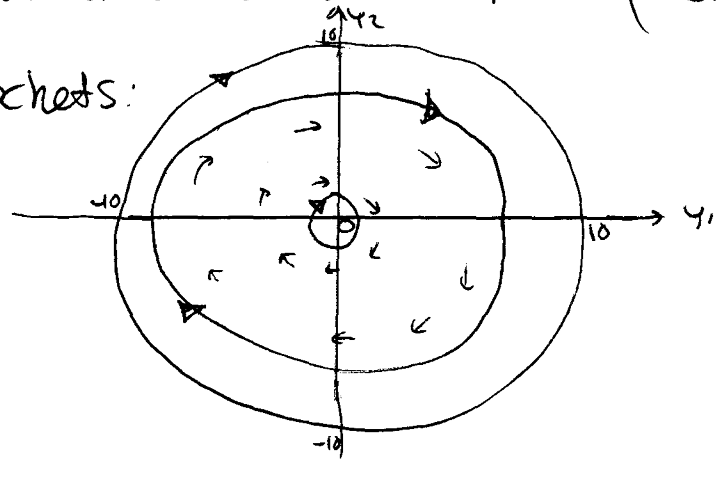
λ_2: $A - (2i\,I) = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ oplossing $\vec{y}_2(t) = e^{2it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
eigenvector $\vec{v}_2 = (1, i)^T$.

$\mathrm{Re}(\vec{y}_1)$ en $\mathrm{Im}(\vec{y}_1)$ zijn ook oplossingen. (propositie 9.2.22)
$\vec{y}_1 = (\cos(-2t) + i\sin(-2t))\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \cos(2t) - i\sin(2t) \\ -i\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$

Dus $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$ en $\vec{y}_4 = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$ zijn ook oplossingen.
Dit zijn cirkels om $(0,0)$.

Fundamentele matrix: $Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t), & -\sin(2t) \\ -\sin(2t), & -\cos(2t) \end{pmatrix}$

Schets:



$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$
eigenwaarden $\lambda_1 = 3 + i$ en $\lambda_2 = 3 - i$

Voor $\lambda_1 = 3 + i$: $A - \lambda I = A - (3+i)I = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$
eigenvector: $\vec{w} = (1, i)^T$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tentamen GDV

Algemene oplossing: (Th. 9.2.25):

$$\varphi(t) = c_1 e^{3t}\left(\cos(t)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \sin(t)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

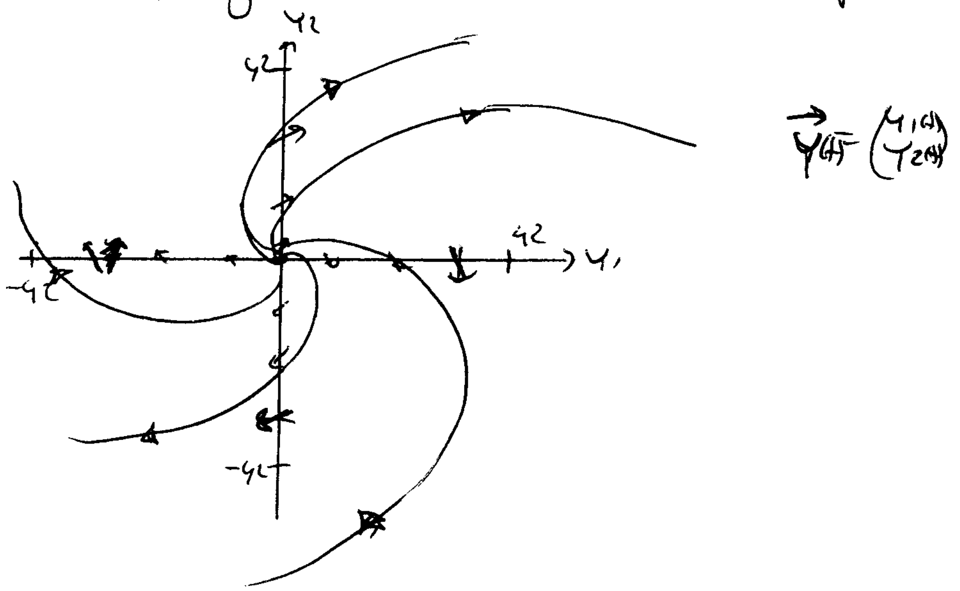
$$+ c_2 e^{3t}\left(\sin(t)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Dus fundamentele matrix:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos t & e^{3t}\sin t \\ -e^{3t}\sin t & e^{3t}\cos t \end{pmatrix}$$

Omdat $Re(\lambda_1) > 0$, gaat het hier om een spiral source:

Schets:



c) $A = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda I) = (3-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 9 = \lambda(\lambda-6) = 0$

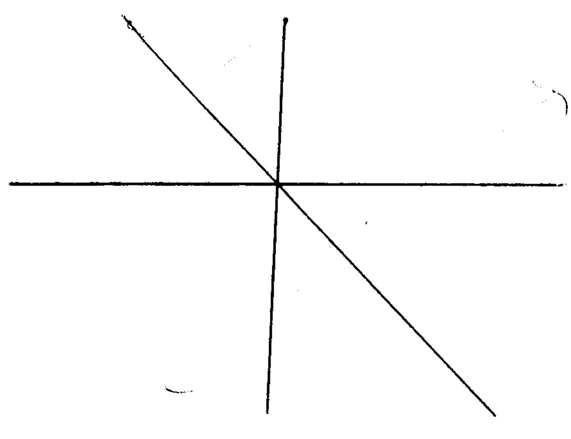
$\lambda = 0$ en $\lambda = 6$

$\lambda = 0$: $A - 0I = A \Rightarrow$ eigenvector $\vec{v}_1 = (1, -1)^T \Rightarrow$ oplossing $\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda = 6$: $A - 6I = \begin{pmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow$ eigenvector $\vec{v}_2 = (1, 1)^T \Rightarrow$ oplossing $\vec{\varphi}_2 = e^{6t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix}1 & e^{6t}\\ -1 & e^{6t}\end{pmatrix}$$

Schets:



4 a) $z'' + 4z' + 3z = ze^{w}$

<u>Eerst homogene vergelijking</u>: $z'' + 4z' + 3z = 0$

Karakteristieke vgl: $\lambda^2 + 4\lambda + 3\lambda = (\lambda+3)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -3$

Dus algemene oplossing voor homogene vgl:

$z_h(w) = C_1 e^{-w} + C_2 e^{-3w}$ met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3 <u>Inhomogeen</u>

Probeer de particulier oplossing: $z_p(w) = \alpha e^{w}$

$z_p' = \alpha e^{w} = z_p''$

Invullen in vgl. geeft:

$z_p'' + 4z_p' + 3z_p = \alpha e^{w} + 4\alpha e^{w} + 3\alpha e^{w} = 8\alpha e^{w}$

en dit moet gelijk zijn aan ze^{w}, dus $\alpha = \frac{1}{4}$. $\Rightarrow z_p = \frac{1}{4}e^{w}$

<u>Algemene oplossing</u>

$z(w) = \frac{1}{4}e^{w} + C_1 e^{-w} + C_2 e^{-3w}$

b) $w'' + 2w' + w = \cos(3z) + z$.

<u>Eerst homogene vgl</u>: $w'' + 2w' + w = 0$

kar.vgl: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$, 2x.

$w_h = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$, is algemene oplossing voor homogene vgl.

<u>Nu</u> $w'' + 2w' + w = \cos(3z)$

Probeer $w_{p_1} = \alpha \sin(3z) + \beta \cos(z3)$

$w_{p_1}' = 3\alpha\cos(3z) + -3\beta\sin(3z)$, $w_{p_1}'' = -9\alpha\sin(3z) - 9\beta\cos(3z)$

Invullen:

$w_{p_1}'' + 2w_{p_1}' + w_p = (-9\alpha - 6\beta + \alpha)\sin(3z) + (-9\beta + 6\alpha + \beta)\cos(3z)$

$= (-8\alpha - 6\beta)\sin(3z) + (6\alpha - 8\beta)\cos(3z)$

4 $= \cos(3z)$

Dus $6\alpha - 8\beta = 1$ en $-8\alpha - 6\beta = 0$

dan $\alpha = 3/50$ en $\beta = -2/25$

Dus $w_{p_1} = 3/50 \sin(3z) + -2/25\cos(3z)$.

<u>Dan</u> $w'' + 2w' + w = z$

$w_{p_2} = az + b$ $w_{p_2}' = a$, invullen: $2a + az + b = z$

dus $2a + b = 0$ en $a = 1$, dus $b = -2$, geeft:

$w_{p_2} = z - 2$

<u>Algemeen</u>: $w(z) = w_h + w_{p_1} + w_{p_2} = \boxed{C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 3/50\sin(3z) - 2/25\cos(3z) + z - 2}$

c) $u''' - u'' + u' - u = t^4 - 2$.

<u>Eerst</u> $u''' - u'' + u' - u = 0$

probeer $u = e^{\lambda t}$. kar vgl: $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

geeft $\lambda = 1$ $\lambda = i$ en $\lambda = -i$

Dus algemene homogene oplossing:

$u_h(t) = C_1 e^t + C_2 \sin(t) + C_3 \cos(t)$

<u>Nu inhomogeen</u>

Probeer: $u_p(t) = -t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d$

$u_p'(t) = -4t^3 + 3at^2 + 2bt + c$

$u_p''(t) = -12t^2 + 6at + 2b$

$u_p'''(t) = -24t + 6a$

Invullen: $-24t + 6a + 12t^2 - 6at - 2b - 4t^3 + 3at^2 + 2bt + c$
$+ \cancel{t^4} - at^3 - bt^2 - ct - d = \cancel{t^4} - 2$

geeft: $(-4 - a)t^3 + (12 + 3a - b)t^2 + (-24 - 6a + 2b + c) \cdot t$
$+ (6a - 2b + c - d) = -2$

moet voor alle t gelden, dus:

$-4 - a = 0 \Rightarrow a = -4$

$12 + 3a - b = 12 + 3 \cdot (-4) - b = -b = 0 \Rightarrow b = 0$

$-24 - 6a + 2b + c = -24 + 24 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$6a - 2b + c - d = 6a - d = -2$

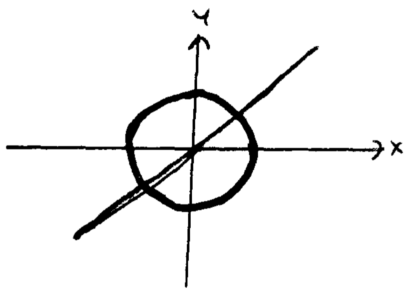
$d = 6a + 2 = -22$

Dus $u_p(t) = -t^4 - 4t^3 - 22$

<u>Algemene oplossing</u>: $u(t) = u_p(t) + u_h(t) = -t^4 - 4t^3 - 22 + C_1 e^{-t} + C_2 \sin t + C_3 \cos t$
met $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

5 $\begin{cases} x' = 1 - x^2 - y^2 \\ y' = x - y \end{cases}$

* <u>x-nulhomoklien</u> als $x' = 0$ oftewel $1 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
dat is een cirkel met straal 1 rond de oorsprong.
* y-nulhomoklien als $y' = 0$ oftewel $x - y = 0 \Rightarrow y = x$



Dus evenwichtspunten zijn:
$(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$

De Jacobiaan van dit stelsel is:

$$J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(1-x^2-y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(1-x^2-y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x-y) & \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$J(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. trace $= -1-\sqrt{2}$, determinant $= 2\sqrt{2}$

trace$^2 - 4\det = 3+2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 3-6\sqrt{2} < 0$, dus spiral sink.

$J(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. trace $= \sqrt{2}-1$, determinant $= -2\sqrt{2}$

trace$^2 - 4\cdot\det = 3-2\sqrt{2} - 4\cdot(-2\sqrt{2}) = 3-2\sqrt{2}+8\sqrt{2} = 3+6\sqrt{2} > 0$

dus dit is een zadelpunt

faseplaatje

4